



ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Δρ. ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΑΣΙΛΑΣ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2012-2013

ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΥΛΗΣ

1. Απλός τόκος
2. Ανατοκισμός
3. Ράντες
4. Δάνεια

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

- Ο τόκος (I) μπορεί να θεωρηθεί σαν η χρηματική αμοιβή που πληρώνεται από κάποιο πρόσωπο ή οργανισμό που λέγεται δανειζόμενος για τη χρήση ενός περιουσιακού στοιχείου που λέγεται συνήθως κεφάλαιο (P) που ανήκει σε ένα άλλο πρόσωπο ή οργανισμό.
- Κεφάλαιο (P) λέγεται το οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων και έχει την ικανότητα να αυξάνεται.
- Χρόνος (t) λέγεται το χρονικό διάστημα για το οποίο δανείζεται κάποιος ένα κεφάλαιο P . Εξυπακούεται ότι ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτή μεταβλητή ή συνεχής μεταβλητή όταν παίρνει τιμές στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

- Τόκος (I) λέγεται το ποσό των χρημάτων που παίρνει ο δανειστής ενός κεφαλαίου P για χρόνο t από τον δανειζόμενο.
- Ετήσιο επιτόκιο (r) είναι ο τόκος για κεφάλαιο $P = 1$ νομισματικής μονάδας στη μονάδα του χρόνου. Συνήθως λαμβάνεται ως μονάδα χρόνου ο ένας χρόνος.
- Τελική αξία (S) ή ύψος ή μέλλουσα αξία είναι το άθροισμα του κεφαλαίου P και του τόκου I . Ο ορισμός αυτός εκφράζεται με τον τύπο:

$$S = P + I$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

- Κεφαλαιοποίηση του τόκου λέγεται η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο και ο συμψηφισμός του σε αρχικό κεφάλαιο.
- Απλή κεφαλαιοποίηση λέγεται αυτή στην οποία ο παραγόμενος τόκος I από τοκισμό κεφαλαίου P σε χρόνο t , προστίθεται στο κεφάλαιο στο τέλος του χρονικού διαστήματος t . Στην περίπτωση αυτή ο τόκος I λέγεται απλός τόκος, το δε αρχικό κεφάλαιο P παραμένει σταθερό για όλες τις περιόδους τοκισμού.
- Σύνθετη κεφαλαιοποίηση λέγεται αυτή στην οποία ο τόκος I που συσσωρεύεται από τον τοκισμό κεφαλαίου P για διάστημα t με ετήσιο επιτόκιο r , προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο P στο τέλος της χρονικής περιόδου t , έτσι ώστε στην επόμενη χρονική περίοδο υπάρχει προς τοκισμό το αρχικό κεφάλαιο P και ο τόκος της χρονικής περιόδου I . Αυτή η διαδικασία λέγεται ανατοκισμός ή σύνθετος τόκος.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

- Υποθέτουμε ότι κεφάλαιο P νομισματικών μονάδων στις οποίες μετρείται το επιτόκιο τοκίζεται για χρόνο t (μονάδες χρόνου) με επιτόκιο r , όπου r είναι ο τόκος 1 νομισματικής μονάδας στη μονάδα του χρόνου.
- Άρα ο τόκος I του κεφαλαίου P , όταν τοκίζεται με απλό επιτόκιο r για χρόνο t , δίνεται από τον τύπο:

$$I = Prt$$

- Στην απλή κεφαλαιοποίηση, η τελική αξία κεφαλαίου δίνεται από τον τύπο:

$$S = P + I = P + Prt = P(1 + rt)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

- Όταν το επιτόκιο r είναι ετήσιο και ο χρόνος (m) εκφράζεται σε μήνες, το επιτόκιο και η τελική αξία δίνονται από τους τύπους:

$$I = \frac{Prm}{12}$$

$$S = P\left(1 + \frac{rm}{12}\right)$$

- Όταν το επιτόκιο r είναι ετήσιο και ο χρόνος (d) εκφράζεται σε ημέρες, το επιτόκιο δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{Prd}{365}$$

$$S = P\left(1 + \frac{rd}{365}\right)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

- Στην εκτέλεση των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων διακρίνουμε 3 είδη υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών με βάση τα 3 είδη ετών.
- Το πολιτικό έτος, το οποίο έχει 365 ημέρες ή 366, αν είναι δίσεχτο. Στο πολιτικό έτος κάθε μήνας περιλαμβάνει τον πραγματικό αριθμό ημερών, π.χ. 31 ο Γενάρης, 28 ή 29 Φλεβάρης κ.τ.λ. Εφαρμόζεται στην Αγγλία, ΗΠΑ, Πορτογαλία.
- Το εμπορικό ή λογιστικό έτος, το οποίο έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας έχει 30 ημέρες. Εφαρμόζεται στη Ρωσία, Σκανδιναβία, Γερμανία, Ελβετία.
- Το μικτό έτος, το οποίο αποτελείται από 360 ημέρες και ο κάθε μήνας λαμβάνεται με τις πραγματικές του ημέρες. Εφαρμόζεται στην Ελλάδα, Ιταλία, Βέλγιο, Ισπανία, Ολλανδία.

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΗ

- Στις οικονομικές συναλλαγές διευκολύνονται κατά πολύ οι υπολογισμοί του τόκου με τη χρήση 2 βασικών μεγεθών, του τοκάριθμου και του σταθερού διαιρέτη.

- Τοκάριθμος (N) ονομάζεται το γινόμενο: $N = Pd$

Όπου P είναι το κεφάλαιο και d είναι ο χρόνος (σε ημέρες) τοκισμού του.

- Σταθερός διαιρέτης ονομάζεται το πηλίκο:

Όταν πρόκειται για εμπορικό ή μικτό έτος $D = \frac{360}{r}$

Όταν πρόκειται για πολιτικό έτος $D = \frac{365}{r}$

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΗ

- Επίσης, με τη χρήση του τοκάριθμου και τους σταθερού διαιρέτη έχουμε:

$$I = \frac{P \cdot d}{360 \cdot r} = \frac{N}{D}$$

ή

$$I = \frac{N}{D}$$

και

$$S = P \left(1 + \frac{d}{360 \cdot r} \right) = P \left(1 + \frac{d}{D} \right)$$

ή

$$S = P \left(1 + \frac{d}{D} \right)$$

ΠΡΟΞΟΦΛΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

- Ονομαστική αξία της συναλλαγματικής λέγεται το ποσό των χρημάτων που είναι γραμμένο στη συναλλαγματική και το οποίο πρέπει να πληρώσει ο οφειλέτης στο δανειστή.
- Παρούσα ή πραγματική αξία μιας συναλλαγματικής ή γραμματίου είναι το χρηματικό ποσό που πρέπει να πληρωθεί σε κάποιο χρόνο t πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής.
- Λήξη της συναλλαγματικής ονομάζεται η ημέρα που πρέπει ο οφειλέτης να πληρώσει στο δανειστή το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στη συναλλαγματική.
- Η ονομαστική αξία περιλαμβάνει εκτός του πραγματικού ποσού που δανείστηκε ο οφειλέτης και τον τόκο που πρέπει να πληρώσει ο οφειλέτης.

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

- Η διαφορά της συναλλαγματικής από το γραμμάτιο: Η συναλλαγματική εκδίδεται από το δανειστή ο οποίος δίνει εντολή στον οφειλέτη να πληρώσει το χρέος του, ενώ το γραμμάτιο εκδίδεται από τον οφειλέτη ο οποίος υπόσχεται να πληρώσει το χρέος του στον δανειστή.
- Προεξόφληση γραμματίου ή συναλλαγματικής λέγεται η καταβολή στον κάτοχο του πιστωτικού τίτλου πριν την ημερομηνία λήξης του, έναντι μεταβίβασης του τίτλου, ενός χρηματικού ποσού το οποίο είναι λιγότερο από την ονομαστική αξία του τίτλου κατά ένα ποσό που αντιστοιχεί στον τόκο της ονομαστικής ή πραγματικής αξίας του τίτλου για το διάστημα από την ημέρα της προεξόφλησης μέχρι την ημέρα λήξης του τίτλου.

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

- Χρόνος προεξόφλησης λέγεται το χρονικό διάστημα από την ημέρα της λήξης του τίτλου.
- Επιτόκιο προεξόφλησης λέγεται το επιτόκιο με το οποίο υπολογίζεται πόσο τόκο θα πληρώσει ο κάτοχος του τίτλου προς προεξόφληση.
- Προεξόφλημα ή έκπτωση ή υπαίρεση λέγεται το χρηματικό ποσό που θα κρατήσει εκείνος που προεξοφλεί τον τίτλο από τον κάτοχο του τίτλου, για τον κίνδυνο που παίρνει, να δώσει ένα ποσό που θα εισπράξει κατά τη λήξη του τίτλου.
- Ισχύει ο εξής τύπος για την προεξόφληση τίτλων:

Παρούσα αξία + Προεξόφλημα = Ονομαστική αξία

ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΤΙΤΛΩΝ

- Εξωτερική προεξόφληση λέγεται η προεξόφληση τίτλων (συναλλαγματικών ή γραμματίων) στην οποία το προεξόφλημα Π είναι ίσο με τον τόκο της ονομαστικής αξίας P για χρόνο t , ο οποίος είναι ο χρόνος από την ημέρα της προεξόφλησης μέχρι τη λήξη του τίτλου και με επιτόκιο r .

$$\Pi = P r t$$

- Έστω ότι A είναι η παρούσα αξία τίτλου στην εξωτερική προεξόφληση. Τότε έχουμε:

$$A + \Pi = P$$

ή

$$A + P r t = P$$

ή

$$A = P (1 - r t)$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΤΙΤΛΩΝ

- Στην περίπτωση που ο χρόνος προεξόφλησης είναι σε ημέρες (d) και το επιτόκιο είναι ετήσιο. Τότε έχουμε:

$$\Pi = P \frac{d}{360} r = \frac{N}{D}$$

ή

$$\Pi = \frac{N}{D}$$

- Όπου $N=Prd$ είναι ο τοκάριθμος
- $D=360/r$ είναι ο σταθερός διαιρέτης
- Συνεπώς, έχουμε:

$$A = P - \Pi = P - P \frac{d}{360} r = P \left(1 - \frac{dr}{360}\right) = P \left(1 - \frac{d}{D}\right)$$

$$A = P \left(1 - \frac{d}{D}\right)$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΤΙΤΛΩΝ

- Εσωτερική προεξόφληση λέγεται η προεξόφληση εκείνη στην οποία το προεξόφλημα Π^* είναι ίσο με τον τόκο τον οποίο δίνει κεφάλαιο P^* ίσο με την παρούσα (ή πραγματική) αξία του τίτλου, όταν τοκιστεί για χρόνο t , ίσο με το χρονικό διάστημα από την ημέρα της προεξόφλησης μέχρι και την ημέρα της λήξης, και με επιτόκιο r , το οποίο συμφωνείται σαν το προεξοφλητικό επιτόκιο.

$$\Pi^* = P^* r t$$

κ α ι

$$\Pi^* = \frac{P r t}{1 + r t}$$

κ α ι

$$A^* = \frac{\Pi}{r t} = \frac{P}{1 + r t}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΤΙΤΛΩΝ

- Αν ο χρόνος προεξόφλησης είναι σε ημέρες (d) και το έτος εμπορικό, τότε το εσωτερικό προεξόφλημα Π^* και η πραγματική αξία A^* δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Pi^* = \frac{N}{D + d}$$

και

$$A^* = \frac{\Pi}{r t} = \frac{P D}{D + d}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΑΤΟΣ, ΟΤΑΝ Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΗ

- Στην εξωτερική προεξόφληση:

$$\Pi = \frac{Art}{1 - rt}$$

- Στην εσωτερική προεξόφληση:

$$\Pi^* = Art$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΞΙΑΣ Ή ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

- Όλες οι οικονομικές αποφάσεις πρέπει να στηρίζονται στη βασική ιδέα ότι το χρήμα έχει αξία σε σχέση με το χρόνο.
- Σε μία οικονομική συναλλαγή κάθε πληρωμή πρέπει να έχει μια ημερομηνία που θα λάβει χώρα. Οι εξισώσεις αξίας στηρίζονται στην αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας.
- Σύμφωνα με την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας, δύο άνισα ποσά χρημάτων σε ορισμένη χρονική στιγμή θεωρούνται (οικονομικά) ισοδύναμα.
- Το ποσό χρημάτων $X \in$ το οποίο πρέπει να δοθεί σήμερα είναι ισοδύναμο με επιτόκιο r με το ποσό $Y \in$ που θα δοθεί t έτη αργότερα, αν ισχύει:

$$Y = X (1 + r t)$$

ή

$$X = Y (1 + r t)^{-1}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΞΙΑΣ Ή ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

- Εξίσωση αξίας ή ισοδυναμίας λέγεται μια εξίσωση η οποία δηλώνει ότι οι αξίες δυο ισοδύναμων ποσών χρημάτων που αναφέρονται στην ίδια ημερομηνία είναι ίσες, για κάποια τιμή του ενός ποσού.
- Εστιακή ημερομηνία λέγεται η ημερομηνία στην οποία αναφέρονται οι ισοδύναμες οικονομικώς αξίες χρημάτων.
- 4 βήματα για τη λύση προβλημάτων οικονομικής ισοδυναμίας.
 - 1^ο Κατασκευή του διαγράμματος χρόνου
 - 2^ο Επιλογή εστιακής ημερομηνίας
 - 3^ο Κατάστρωση της εξίσωσης ισοδυναμίας
 - 4^ο Λύση της εξίσωσης ισοδυναμίας

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

- Ανατοκισμός λέγεται η κεφαλαιοποίηση στην οποία ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου $t=1$ ο οποίος παράγεται από κεφάλαιο P τοκισμένο προς επιτόκιο i προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο P και το νέο κεφάλαιο $P+I$ τοκίζεται πάλι προς επιτόκιο i .
- Ο ανατοκισμός εφαρμόζεται στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, ενώ ο απλός τόκος, στον οποίο ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου αφαιρείται από τον καταθέτη, εφαρμόζεται στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.
- Για πρακτικούς λόγους, το επιτόκιο στον απλό τόκο θα συμβολίζεται με r και στον ανατοκισμό με i .

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

- Στο τέλος του χρόνου t η τελική αξία αρχικού κεφαλαίου P που τοκίζεται με ανατοκισμό, προς ετήσιο επιτόκιο i θα είναι:

$$S = P(1+i)^t$$

- Ο συντελεστής $(1+i)^t$ λέγεται συντελεστής ανατοκισμού και δίνει την τελική αξία μετά από t χρόνια της μονάδας του νομίσματος.

ΤΟΚΟΣ ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

- Ο τόκος που δίνει κεφάλαιο P τοκιζόμενο με επιτόκιο i για χρόνο t δίνεται από τον τύπο:

$$I = S - P = P(1 + i)^t - P = P[(1 + i) - 1]$$

$$I = P[(1 + i)^t - 1]$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

- Ισχύει ότι:

$$P(1+i)^t > P[(1+ti)]$$

- Γιατί $(1+i)^t > [(1+ti)]$ για $t > 1$
- Άρα ο τόκος της κεφαλαιοποίησης με ανατοκισμό είναι μεγαλύτερος από τον τόκο της απλής κεφαλαιοποίησης για $t > 1$.
- Για $t=1$ ο τόκος της απλής κεφαλαιοποίησης είναι ίσος με τον τόκο κεφαλαιοποίησης του ανατοκισμού.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ Ή ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Από τον τύπο της τελικής αξίας έχουμε:

$$(1 + i)^t = \frac{S}{P}$$

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$t = \frac{\ln S - \ln P}{\ln(1 + i)}$$

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} (x_2 - x_1)$$

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

- Στην περίπτωση του απλού τόκου το επιτόκιο r λέγεται ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο.
- Στην περίπτωση του απλού τόκου, όταν ο τόκος βρίσκεται κατά τη χρονική περίοδο ίση με $1/m$ του ενός χρόνου, τότε το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο r διαιρείται δια m . Στην περίπτωση αυτή το επιτόκιο r και το επιτόκιο r/m λέγονται ανάλογα επιτόκια.

$$S = P (1 + t r)$$

$$I = P \left(\frac{r}{m} \right) (m t)$$

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

- Στον ανατοκισμό δύο επιτόκια λέγονται ισοδύναμα, αν παράγουν τον ίδιο τόκο ή την ίδια τελική αξία για το ίδιο κεφάλαιο και τον ίδιο συνολικό χρόνο τοκισμού, όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους ανατοκισμού.

$$S = P (1 + i_m)^m$$

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

- Το επιτόκιο i_m λέγεται επιτόκιο κλασματικής περιόδου. Το επιτόκιο i λέγεται ετήσιο πραγματικό επιτόκιο.

$$J_m = m \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

- Το επιτόκιο $J_m = i_m * m$ λέγεται ονομαστικό επιτόκιο συχνότητας. Μας βοηθάει να βρίσκουμε το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο συχνότητας m , όταν ξέρουμε το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο i .

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΟΤΑΝ Ο ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ

- Έστω ότι ο χρόνος t αποτελείται από n χρονικές μονάδες και m/l μέρη μιας χρονικής μονάδας.
- Εκθετικός τρόπος

$$S = P(1+i)^n (1+i)^{\frac{m}{l}} = P(1+i)^{n+\frac{m}{l}}$$

- Γραμμική μέθοδος

$$C = P(1+i)^n \left(1 + \frac{m}{l}i\right)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΟΤΑΝ Ο ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ

- Γραμμική μέθοδος
- Αν η ακέραια περίοδος είναι ο ένας χρόνος και ο χρόνος είναι n χρόνια και m μήνες, τότε έχουμε:

$$C = P(1 + i)^n \left(1 + \frac{m}{12}i\right)$$

- Αν ο χρόνος είναι n χρόνια και d ημέρες, τότε έχουμε:

$$C = P(1 + i)^n \left(1 + \frac{d}{360}i\right)$$

ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

- Πολλές φορές ένας έμπορος χρειάζεται να αντικαταστήσει ορισμένους τίτλους (π.χ. γραμμάτια, συναλλαγματικές) με άλλους, χωρίς η αντικατάσταση αυτή να επιφέρει κέρδος ή ζημία στα εναλλασσόμενα μέρη (πιστωτή και οφειλέτη). Η αντικατάσταση αυτή τίτλων διέπεται από ορισμένες μαθηματικές σχέσεις.
- Ένα ποσό X χρηματικών μονάδων το οποίο καταβάλλεται σε μία ορισμένη ημερομηνία είναι (οικονομικά) ισοδύναμο, σε ορισμένο επιτόκιο i ανατοκίζόμενο, με ένα ποσό Y των ίδιων νομισματικών μονάδων που καταβάλλεται η χρονικές περιόδους αργότερα, αν ισχύει:

$$Y = X(1+i)^n$$

ή

$$X = Y(1+i)^{-n}$$

ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

- Αντικατάσταση ενός συνόλου τίτλων με ένα άλλο σύνολο τίτλων είναι η ανταλλαγή του ενός συνόλου τίτλων που λήγουν σε ορισμένες ημερομηνίες με ένα σύνολο άλλων τίτλων που λήγουν σε ορισμένες άλλες ημερομηνίες. Τα 2 σύνολα τίτλων είναι (οικονομικά) ισοδύναμα στην κοινή ημερομηνία σύγκρισης που λέγεται εποχή ισοδυναμίας, όταν το σύνολο των πραγματικών αξιών του ενός συνόλου ποσών στην εποχή ισοδυναμίας είναι ίσο με το σύνολο των πραγματικών τιμών του άλλου συνόλου ποσών στην ίδια εποχή ισοδυναμίας.
- Η εξίσωση που εκφράζει την (οικονομική) ισοδυναμία των δύο συνόλων ποσών σε μία δεδομένη εποχή ισοδυναμίας λέγεται εξίσωση ισοδυναμίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΙΤΛΩΝ ΟΤΑΝ Η ΕΠΟΧΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΕΙΝΑΙ Η ΗΜΕΡΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

- Η ημέρα υπολογισμού συμβολίζεται με $t=0$, η εποχή ισοδυναμίας συμβολίζεται με t_e και η ημέρα λήξης (κοινή λήξη) του ενιαίου γραμματίου P_e είναι η t_h
- Αν η προεξόφληση είναι εξωτερική:

$$P_h(1-t_h i) = P_1(1-t_1 i) + P_2(1-t_2 i) + \dots + P_a(1-t_a i)$$

- Αν η προεξόφληση είναι εσωτερική:

$$\frac{P_h}{(1-t_h i)} = \frac{P_1}{(1-t_1 i)} + \frac{P_2}{(1-t_2 i)} + \dots + \frac{P_a}{(1-t_a i)}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΙΤΛΩΝ ΟΤΑΝ Η ΕΠΟΧΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΕΙΝΑΙ Η ΚΟΙΝΗ ΛΗΞΗ

- Στην περίπτωση που η εποχή ισοδυναμίας t_e είναι η κοινή λήξη t_h έχουμε $t_e = t_h$
- Αν η προεξόφληση είναι εξωτερική:

$$P_h = P_1(1 - (t_1 - t_h)i) + P_2(1 - (t_2 - t_h)i) + \dots + P_a(1 - (t_a - t_h)i)$$

PANΤΕΣ

- Οι ράντες χρησιμοποιούνται συνήθως στην εξόφληση ενός χρέους με δόσεις οι οποίες καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.
- Ράντα ή χρηματική ροή ή χρηματοσειρά λέγεται μια σειρά χρηματικών ποσών που καταβάλλονται σε ίσα τακτά χρονικά διαστήματα για τα οποία ισχύει ο ανατοκισμός με συγκεκριμένο επιτόκιο i .
- Τα χρηματικά ποσά που καταβάλλονται σε κάθε ράντα λέγονται όροι ή δόσεις της και συμβολίζονται με R .
- Λήξη ενός όρου μιας ράντας λέγεται η ημέρα κατά την οποία καταβάλλεται ο όρος αυτός.
- Περίοδος μιας ράντας λέγεται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών καταβολών όρων (λήξεων).

PANΤΕΣ

- Αρχή μιας ράντας λέγεται η αρχή της πρώτης περιόδου της ράντας.
- Τέλος μιας ράντας λέγεται το τέλος της τελευταίας περιόδου, δηλαδή, της περιόδου στην οποία γίνεται η καταβολή του τελευταίου όρου της ράντας.
- Ασυνεχείς ή διακριτές λέγονται οι ράντες στις οποίες ο χρόνος καταβολής κάθε όρου είναι μια διακριτή μεταβλητή. Π.χ. 1 Ιανουαρίου.
- Συνεχείς λέγονται οι ράντες των οποίων ο χρόνος είναι μία συνεχής μεταβλητή, δηλαδή, καταβάλλονται χρηματικά ποσά κάθε χρονική στιγμή.
- Μια ράντα λέγεται πρόσκαιρη όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι καθορισμένο.

PANTEΣ

- Μια ράντα λέγεται διηνεκής ή πάγια όταν το πλήθος των όρων της είναι άπειρο.
- Μία ράντα λέγεται άμεση όταν η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται στην αρχή της πρώτης περιόδου. Στις ράντες αυτές η εποχή υπολογισμού, δηλαδή, το χρονικό σημείο στο οποίο υπολογίζεται η αξία των όρων της ράντας, βρίσκεται στην αρχή της ράντας.
- Μέλλουσα λέγεται μια ράντα όταν η καταβολή της πρώτης δόσης (όρου) γίνεται μετά από ορισμένο αριθμό περιόδων.
- Αρξάμενη λέγεται μια ράντα όταν η καταβολή της πρώτης δόσης γίνεται πριν από ορισμένο αριθμό περιόδων.

PANΤΕΣ

- Μία ράντα λέγεται σταθερή όταν οι όροι της είναι ίσοι.
- Όταν κάθε όρος της ράντας είναι ίσος με μια νομισματική μονάδα, τότε η ράντα λέγεται μοναδιαία.
- Όταν οι όροι της ράντας δεν είναι σταθερά χρηματικά ποσά, τότε η ράντα λέγεται μεταβλητή.
- Μία ράντα λέγεται ακέραιη όταν η περίοδος αυτής και η περίοδος στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο συμπίπτουν. Όταν π.χ. η περίοδος του επιτοκίου είναι 1 χρόνος και η κάθε δόση της ράντας καταβάλλεται κάθε χρόνο, τότε η ράντα λέγεται ακέραιη.
- Όταν το επιτόκιο μιας ράντας αναφέρεται σε 1 χρονική μονάδα, αλλά οι δόσεις (όροι) της ράντας καταβάλλονται κάθε χρονική περίοδο ίση με το κλάσμα $1/m$ της χρονικής μονάδας του επιτοκίου, τότε η ράντα λέγεται κλασματική.

PANΤΕΣ

- Μία ράντα λέγεται ληξιπρόθεσμη όταν η καταβολή του κάθε όρου της (δόσης) γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου της ράντας.
- Προκαταβλητέα λέγεται η ράντα όταν η καταβολή κάθε όρου της γίνεται στην αρχή κάθε περιόδου.
- Τυχαία λέγεται μια ράντα όταν η καταβολή των όρων της εξαρτάται από τυχαίους παράγοντες.
- Βέβαιη ράντα έχουμε όταν η καταβολή των όρων της είναι βέβαιη, δηλαδή, δεν εξαρτάται από την εμφάνιση κάποιου γεγονότος.
- Ράντα ζωής λέγεται η ράντα όταν η καταβολή των όρων της εξαρτάται από τη διάρκεια ζωής ενός ανθρώπου.
- Εποχή υπολογισμού μιας ράντας λέγεται η χρονική στιγμή κατά την οποία υπολογίζεται η αξία των όρων της ράντας.

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$$S_{n-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

- Έστω ληξιπρόθεσμη, ασυνεχής, ακέραιη και άμεση ράντα.
- R = ο όρος της ράντας όπου $R_1 = R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$
- N = συνολικός αριθμός όρων
- i = επιτόκιο κάθε περίοδο
- S = τελική αξία ράντας
- Η τελική αξία της ράντας είναι:

$$S_{n-i} = \sum_{p=1}^n R_p (1+i)^{n-p}$$

ή

$$S_{n-i} = R s_{n-i}$$

και

$$S_{n-i} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

άρα

$$R = \frac{S}{s_{n-i}}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$$a_{n|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$$A_{n-i} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n-i}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

s_n και a_n

$$i = i_1 + \frac{(s_{n-i} - s_{n-i_1})}{(s_{n-i_2} - s_{n-i_1})} (i_2 - i_1)$$

και

$$i = i_1 + \frac{(a_{n-i_1} - a_{n-i})}{(a_{n-i_1} - a_{n-i_2})} (i_2 - i_1)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ n ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΜΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ s_n και a_n

$$n = n_1 + \frac{(a_{n-i} - a_{n_1-i})}{(a_{n_2-i} - a_{n_1-i})} (n_2 - n_1)$$

- Αν το n που βρίσκεται από τον παραπάνω τύπο έχει τη μορφή $n = \beta + \lambda$, όπου β είναι ένας ακέραιος αριθμός και λ είναι ένας κλασματικός αριθμός, τότε:

- 1^η μέθοδος

$$R = \frac{A_{n-i}}{a_{n-i}}$$

- Αν ισχύει $\frac{A_{n-i}}{a_{n-i}}$ τότε λαμβάνουμε τις β δόσεις ίσες η καθεμία με R και τη τελευταία δόση ίση με λR . Η τελευταία δόση λέγεται συμπληρωματική.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ n ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΜΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ s_n και a_n

- 2η μέθοδος
- Αν ο αριθμός n είναι $n=\beta+\lambda$, μπορούμε να μεταβάλουμε τη δόση R της ράντας έτσι, ώστε να πληρωθεί το χρέος σε β ή $(\beta+1)$ δόσεις.

Έχουμε:
$$R_1 = \frac{\alpha \rho \chi \iota \kappa \acute{o} \pi \omicron \sigma \acute{o}}{a_{\beta-i}}$$

όπου

$$a_{\beta-i} = \frac{1 - (1+i)^{-\beta}}{i}$$

Επίσης

$$R_2 = \frac{\alpha \rho \chi \iota \kappa \acute{o} \pi \omicron \sigma \acute{o}}{a_{\beta+1-i}}$$

όπου

$$a_{\beta+1-i} = \frac{1 - (1+i)^{-(\beta+1)}}{i}$$

Άρα

$$R_c = [A \rho \chi \iota \kappa \acute{o} \pi \omicron \sigma \acute{o} - R a_{\beta-i}](1+i)^{(\beta+1)}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ ΜΙΑΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

- Σε προβλήματα εμπορικών συναλλαγών η τελική αξία ή η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι συνήθως γνωστά και ζητείται να βρεθεί η περιοδική πληρωμή (δόση). Στα προβλήματα αυτά διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
- (α) Δίνεται η αρχική τιμή A_n

$$R = \frac{A_{n-i}}{a_{n-i}} = A_{n-i} \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

- (β) Δίνεται η τελική τιμή S_n

$$R = \frac{S_{n-i}}{s_{n-i}} = S_{n-i} \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

- Υπενθυμίζεται πως προκαταβλητέα ράντα είναι εκείνη της οποίας κάθε όρος καταβάλλεται στην αρχή της αντίστοιχης περιόδου. Ο πρώτος όρος καταβάλλεται αμέσως στη χρονική στιγμή $t=0$.

$$S_n(\text{due}) = R(1+i)s_{n-i}$$

Εναλλακτικά

$$S_n(\text{due}) = Rs_{n+1-i} - R = R(s_{n+1-i} - 1)$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

$$A_n(\text{due}) = R[1 + a_{n-1|i}]$$

$$\text{για } R = 1$$

$$a_{n-1}(\text{due}) = 1 + a_{n-1|i}$$

ΜΕΛΛΟΥΣΑ ΡΑΝΤΑ

- Μέλλουσα ράντα είναι εκείνη στην οποία η πρώτη πληρωμή δεν γίνεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου, αλλά σε κάποια χρονική στιγμή αργότερα, μετά από ένα ορισμένο αριθμό περιόδων.
- Λέμε ότι μια μέλλουσα ράντα έχει επιβράδυνση m περιόδων, αν η πρώτη πληρωμή (πρώτος όρος) γίνεται στην αρχή της $m+1$ περιόδου, αν η ράντα είναι προκαταβλητέα ή στο τέλος της $m+1$ περιόδου, αν η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη. Αντίστροφα, ο πρώτος όρος μιας ράντας που έχει επιβράδυνση m περιόδων καταβάλλεται την $m+1$ περίοδο.

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_m|A_n(\text{def}) = Ra_{n-i}(1+i)^{-m}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_m S_n(\text{def}) = S_{n-i} = R s_{n-i}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_m/A_{n-i}(\text{def}) = Ra_{n-i}(1+i)^{-m+1}$$

ή

$${}_m/A_{n-i}(\text{def}) = R[a_{n+m-1-i} - a_{m-1-i}]$$

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_m S_{n-i}(\text{def}) = (1+i)S_{n-i} = (1+i)Rs_{n-i}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΑΡΞΕΑΜΕΝΗΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_h A_{n-i} = A_{n-i} (1+i)^h = Ra_{n-i} (1+i)^h$$

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΑΡΞΕΑΜΕΝΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

$${}_h A_{n-i}(\text{due}) = A_{n-i}(1+i)^{h+1} = Ra_{n-i}(1+i)^{h+1}$$

ΔΑΝΕΙΑ

- Δάνειο λέγεται ένα χρηματικό ποσό το οποίο δίνεται από κάποιον ιδιώτη ή ένα πιστωτικό ίδρυμα (δανειστής) σε κάποιον άλλο ιδιώτη ή ένα πιστωτικό ίδρυμα (οφειλέτης) με την προϋπόθεση να επιστραφεί σε μια μέλλουσα στιγμή, συνήθως με ορισμένο τόκο.
- Τα δάνεια διακρίνονται ως προς τη διάρκεια σε βραχυπρόθεσμα (λήγουν σε λιγότερο από ένα χρόνο) και μακροπρόθεσμα (διάρκειας μεγαλύτερης του έτους).
- Τα δάνεια διακρίνονται ανάλογα με το πλήθος των δανειστών σε 2 κατηγορίες:
 1. Ενιαία. Δάνεια στα οποία ο δανειστής είναι ένα πρόσωπο (φυσικό ή νομικό)
 2. Ομολογιακά. Δάνεια στα οποία οι δανειστές είναι πολλοί.

ΔΑΝΕΙΑ

- Τα μακροπρόθεσμα δάνεια διακρίνονται σε πάγια ή διηλεκτή και σε εξοφλητέα.
- Πάγια λέγονται τα δάνεια τα οποία ο οφειλέτης δεν υποχρεούται να εξοφλήσει σε μία ορισμένη χρονική στιγμή. Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο οφειλέτης πληρώνει μόνο τον τόκο που παράγεται από το κεφάλαιο του δανείου με το επιτόκιο που έχει συμφωνηθεί, ενώ το αρχικό κεφάλαιο του δανείου παραμένει απλήρωτο.
- Εξοφλητέα είναι τα δάνεια τα οποία πρέπει να εξοφληθούν από τον οφειλέτη εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος και με ορισμένο επιτόκιο.

ΔΑΝΕΙΑ

- Διακρίνονται 2 περιπτώσεις εξοφλητέων δανείων. Τα εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια και τα εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά.
- Εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια λέγονται τα δάνεια που εξοφλούνται στο τέλος της διάρκειας τους με μία δόση με τους εξής 2 τρόπους:
 1. Ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε περιόδου τους τόκους του δανείου και στο τέλος της διάρκειας του δανείου πληρώνει το αρχικό κεφάλαιο (καθεστώς απλού τόκου).
 2. Ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος της χρονικής διάρκειας περιόδου του δανείου τον τόκο και το κεφάλαιο του αρχικού δανείου (καθεστώς ανατοκισμού).
- Εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά δάνεια λέγονται τα δάνεια που εξοφλούνται σε δόσεις. Το ποσό της κάθε δόσης λέγεται τοκοχρεολύσιο (R_t) και είναι ίσο με το άθροισμα του ποσού που καταβάλλεται για την εξόφληση του αρχικού κεφαλαίου (C_t) και του ποσού που καταβάλλεται για την εξόφληση του τόκου (I_t).
- Ισχύει: $R_t = C_t + I_t$

ΔΑΝΕΙΑ

- Χρεολύσιο λέγεται το ποσό που καταβάλλεται για την εξόφληση του αρχικού κεφαλαίου (C_t).
- Απόσβεση δανείου λέγεται το σύνολο των οικονομικών πράξεων που γίνονται για την εξόφληση του δανείου με σειρά ισόποσων πληρωμών που ονομάζονται δόσεις.
- Συστήματα απόσβεσης δανείου λέγονται οι διάφοροι τρόποι απόσβεσης δανείων.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΠΟΣΟΥ

- Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο οφειλέτης καταβάλλει στον δανειστή μόνο τον τόκο του οφειλόμενου ποσού C , δηλαδή, $I_t = C_t \cdot i$ για $t = 1, 2, \dots, n$
- Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου για $n-1$ περιόδους ο οφειλέτης δεν εξοφλεί το αρχικό ποσό C που δανείστηκε, αλλά το ποσό C εξοφλείται στο τέλος της n περιόδου. Δηλαδή
 $C_t = 0$ για $t = 1, 2, \dots, n-1$ $C_n = C$

Επίσης

- $RD_t = C$ για $t = 1, 2, \dots, n-1$ $RD_n = 0$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΙΣΩΝ ΜΕΡΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Στο σύστημα απόσβεσης ίσων μερών κεφαλαίου το χρεολύσιο που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου είναι ίσο με C/n , ενώ ο τόκος υπολογίζεται και καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου.

- Έχουμε
$$C_t = \frac{C}{n}$$

- Στο τέλος του $t-1$ χρόνου, θα έχει εξοφληθεί ποσό του δανείου ίσο με $(t-1)*C/n$. Άρα, στην αρχή του t χρόνου το ποσό του δανείου που οφείλεται είναι $C-(t-1)*C/n$. Ο τόκος του ποσού αυτού για τον t χρόνο

$$I_t = (C - (t-1)\frac{C}{n})i = Ci - (t-1)\frac{C}{n}i$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΙΣΩΝ ΜΕΡΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Άρα οι τόκοι αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο Ci και λόγο $(-C/n \cdot i)$ σύμφωνα με την εξίσωση:

$$I_t = Ci + (t - 1)\left(-\frac{C}{n}i\right)$$

- Το τοκοχρεολύσιο (δόση) της t περιόδου θα είναι:

$$R_t = C_t + I_t = \frac{C}{n} + Ci + (t - 1)\left(-\frac{C}{n}i\right)$$

- Το ποσό που έχει εξοφληθεί στο τέλος του t χρόνου είναι:

$$PD_t = t \frac{C}{n}$$

- Το υπόλοιπο του χρέους RD στο τέλος t χρόνου είναι:

$$RD_t = C - t \frac{C}{n}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΤΟ ΤΟΚΟΧΡΕΩΛΥΣΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟ

- Υποθέτουμε ότι ένα δάνειο ποσού C εξοφλείται με n σταθερές δόσεις ίσες με R , δηλαδή: $R_t = R \quad t= 1,2,\dots,n$

- Η αρχική αξία της ράντας A είναι ίση με το ποσό του δανείου C

- Αν το επιτόκιο είναι i έχουμε: $R a_{n-i} = C$
ή

$$R = \frac{C}{a_{n-i}}$$

- Άρα έχουμε:

$$R_t = R = \frac{C}{a_{n-i}}$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΤΟ ΧΡΕΟΛΥΣΙΟ ΚΑΙ Ο ΤΟΚΟΣ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

- Το σύστημα αυτό είναι ένα σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου στο οποίο ισχύει:

$$I_t = C i$$

και

$$R_t = R = \frac{C}{a_{n-i}}$$

και

$$C_t = R_t - I_t = \frac{C}{a_{n-i}} - C i$$

$$P D_t = P D_{t-1} + P D_1 (1 + i)^{t-1}$$

$$R D_t = C - P D_t$$

$$C_t = \frac{C}{S_{n-i}}$$

ΠΡΟΟΔΕΥΤΙΚΟ Ή ΓΑΛΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

- Το σύστημα αυτό εφαρμόζεται πολύ συχνά στις τράπεζες και γενικά στις δανειακές συναλλαγές. Είναι ένα σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου και μεταβλητού τόκου.

$$R_t = C \frac{1}{a_{n-i}}$$

$$C_1 = \frac{C}{s_{n-i}}$$

$$I_t = RD_{t-1}i$$

$$C_{t+1} = C_t(1+i)$$

$$C_1 = R(1+i)^{-n}$$

$$C_t = R(1+i)^{t-n-1}$$

$$RD_t = C \left[1 - \frac{s_{t-i}}{s_{n-i}} \right] = C - PD_t$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΥΡΩΠΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΔΑΝΕΙΟΥ

- Το σύστημα Κεντρικής Ευρώπης είναι σύστημα σταθερού τοκοχρεωλυσίου και μεταβλητού τόκου. Στο σύστημα αυτό ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου καταβάλλεται στην αρχή της περιόδου, δηλαδή, έχουμε:

$$PD_0 = C$$

$$I_0 = Ci$$

$$C_t = C_t \left(\frac{1}{1-i} \right)$$

$$C_1 = R(1+i_1)^{-n+1}$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΔΑΝΕΙΟΥ

- Δημιουργία του εξοφλητικού αποθέματος.
- Δύο συστήματα: Το Αμερικανικό σύστημα και το σύστημα Sinking Fund (Σύστημα κεφαλαίου χρεολυσίας).

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

- Είναι σύστημα απόσβεσης 2 επιτοκίων.
- Υποθέτουμε ότι το δανειζόμενο κεφαλαίο είναι C προς επιτόκιο i . Το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των n χρονικών περιόδων έχει τελική αξία:

$$S = P(1+i)^n$$

- Η τελική αξία καταβάλλεται από τον δανειζόμενο στο τέλος των n χρονικών περιόδων. Ταυτόχρονα ο οφειλέτης, για να δημιουργήσει το ποσό S , καταθέτει στην τράπεζα (στην ίδια η οποία τον δάνεισε ή σε μια διαφορετική) στο τέλος της κάθε χρονικής περιόδου ένα ποσό R που τοκίζεται με επιτόκιο i_1 διαφορετικό από i (συνήθως $i > i_1$). Το ποσό R είναι ο όρος μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με τελική αξία: $R S_{n-i_1}$

- Συνεπώς ισχύει: $R S_{n-i_1} = C (1 + i)^n$

ή

$$R = \frac{C (1 + i)^n}{S_{n-i_1}}$$

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

- Συμβολίζουμε με R_i , AED_i και RD_i τη δόση, τον παραγόμενο τόκο, το απόθεμα προς εξόφληση και το υπόλοιπο χρέους, αντίστοιχα, στο τέλος της (i) χρονικής περιόδου.
- Ισχύουν: $R_i = R$

$$I_i = (AED_{i-1})i_1$$

$$AED_i = AED_{i-1} + R_i + I_i$$

$$RD_i = C$$

$$RD_n = 0$$

ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΔΑΝΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΧΡΕΟΛΥΣΙΑΣ (SINKING FUND)

- Είναι σύστημα απόσβεσης 2 επιτοκίων.
- Ο δανειζόμενος καταβάλλει κάθε χρόνο στον δανειστή τον τόκο του κεφαλαίου C και συγχρόνως καταθέτει ένα ποσό R_i με επιτόκιο i_1 το οποίο είναι συνήθως διαφορετικό από το επιτόκιο του δανεισμού (i), έτσι ώστε να σχηματισθεί στο τέλος της (n) χρονικής περιόδου C κεφάλαιο ίσο με το αρχικό ποσό του δανείου C .
- Άρα, ο δανειζόμενος καταβάλλει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τα ποσά $C \cdot i$ και R_i όπως ισχύει:

$$R s_{n-i_1} = C \Rightarrow R_1 = \frac{C}{s_{n-i_1}}$$

ή

$$R_i = Ci + \frac{C}{s_{n-i_1}}$$

- Το συνολικό ποσό της δόσης του δανειζόμενου είναι: $R = Ci + \frac{C}{s_{n-i_1}}$

- **ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ**